Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación
Nivel Superior
Prueba 2

9 de mayo de 2023

Zona A tarde | **Zona B** mañana | **Zona C** tarde

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

2223 – 7222

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

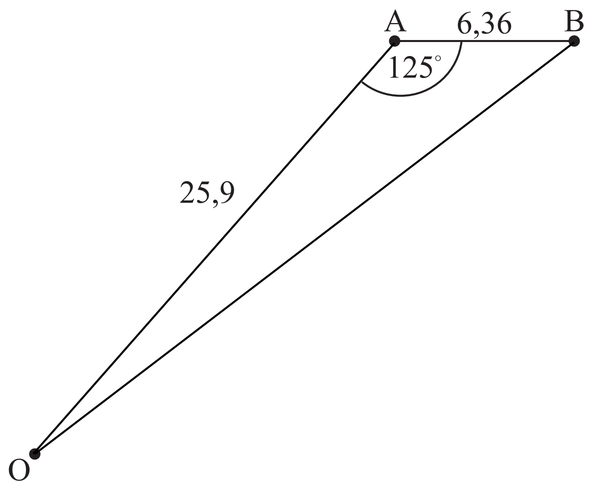
1. [Puntuación máxima: 13]

La figura muestra una serie de puntos en un parque visto desde arriba en un instante concreto.

La distancia entre dos árboles, situados en los puntos A y B, es igual a $6{,}36\,\mathrm{m}$.

Odette está jugando al fútbol en el parque y se encuentra en el punto O, siendo $\mathrm{OA} = 25{,}9\,\mathrm{m}$ y $\mathrm{O\hat{A}B} = 125^\circ$.

la figura no está dibujada a escala



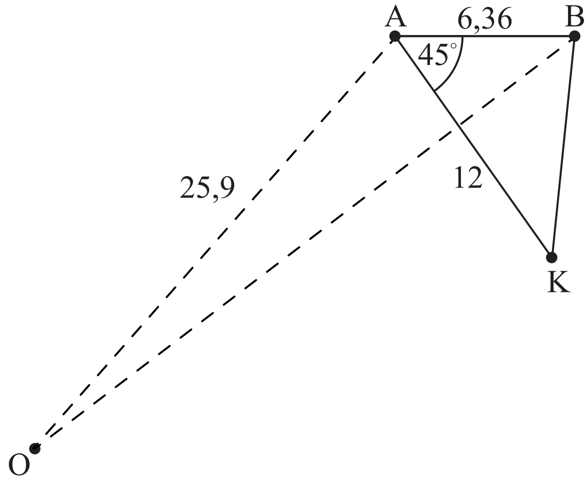
(a) Calcule el área del triángulo AOB. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

Khemil —amigo de Odette— se encuentra en el punto K, que está a $12\,\mathrm{m}$ de A y siendo $\mathrm{K\hat{A}B} = 45^{\circ}$.

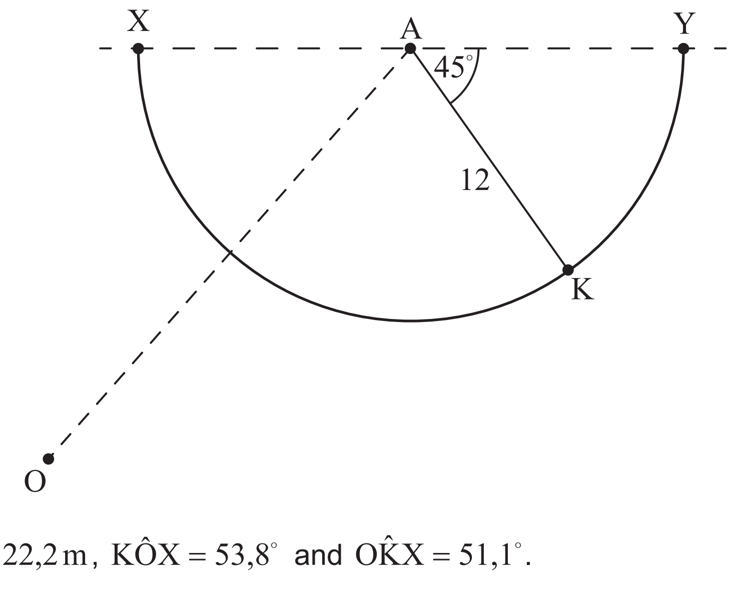
la figura no está dibujada a escala



(b) Calcule a qué distancia de B está Khemil. [3]

XY es un camino semicircular que hay en el parque, con centro en A y tal que $\mathrm{K\hat{A}Y} = 45^{\circ}$. Khemil está de pie, en el camino, y el balón de fútbol de Odette se encuentra en el punto X. Toda esta información se muestra en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



La longitud $\mathrm{KX} = 22{,}2\,\mathrm{m}$, $\mathrm{K\hat{O}X} = 53{,}8^{\circ}$ and $\mathrm{O\hat{K}X} = 51{,}1^{\circ}$.

(c) Halle quién de los dos —Odette o Khemil— está más cerca del balón de fútbol. [4]

Khemil corre por el camino semicircular para coger el balón.

(d) Calcule la distancia que corre Khemil. [3]

2. [Puntuación máxima: 12]

Una científica está realizando un experimento sobre el crecimiento de una determinada especie de bacteria.

La población (P) de estas bacterias se puede modelizar mediante la función

$$P(t) = 1\,200 \times k^t,\ t \geq 0,$$

donde t es el número de horas que han transcurrido desde que empezó el experimento y k es una constante positiva.

(a) (i) Escribe el valor de $P(0)$.

(ii) Interprete lo que significa este valor en este contexto. [2]

3 horas después de que empezara el experimento, la población de estas bacterias era igual a $18\,750$.

(b) Halle el valor de k. [2]

(c) Halle cuál era la población de bacterias 1 hora y 30 minutos después de que empezara el experimento. [2]

La científica realiza un segundo experimento con una especie diferente de bacterias. La población (S) de estas bacterias se puede modelizar mediante la función

$$S(t) = 5\,000 \times 1{,}65^t,\ t \geq 0,$$

donde t es el número de horas que han transcurrido desde que empezaran los dos experimentos.

(d) Halle el valor de t cuando las dos poblaciones de bacterias son iguales. [2]

Tienen que transcurrir 2 horas y m minutos para que el número de bacterias del segundo experimento llegue a $19\,000$.

(e) Halle el valor de m; dé la respuesta como un número entero. [4]

3. [Puntuación máxima: 16]

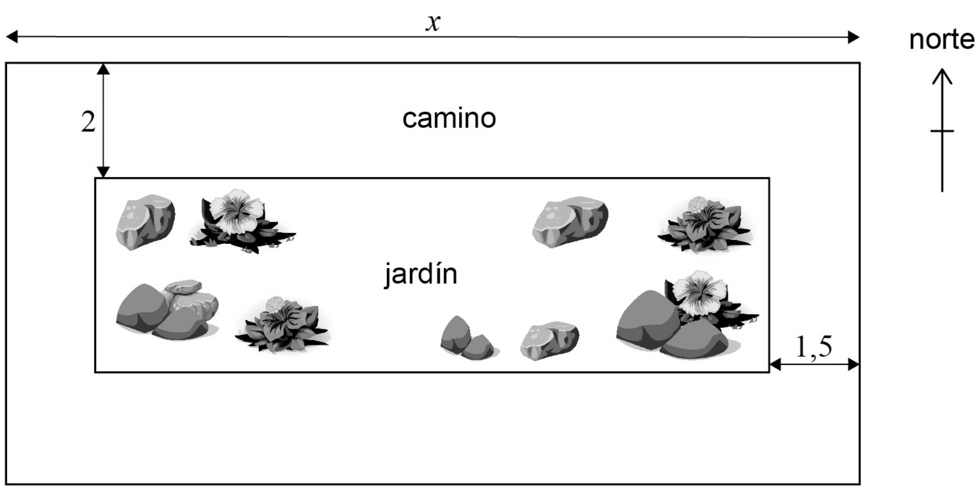
Un parque dado consta de un jardín rectangular, de $A\,\mathrm{m}^2$ de área, y de un camino de cemento que lo rodea. El área total del parque son $1200\,\mathrm{m}^2$.

En los lados norte y sur del parque, el camino tiene una anchura de $2\,\mathrm{m}$.

En los lados oeste y este del parque, el camino tiene una anchura de $1{,}5\,\mathrm{m}$.

La longitud del parque (es decir, de los lados norte y sur) es igual a x metros, $3 < x < 300$.

la figura no está dibujada a escala



(a) Muestre que $A = 1212 - 4x - \dfrac{3600}{x}$. [5]

(b) Halle las posibles dimensiones del parque si el área del jardín fuera igual a $800\,\mathrm{m}^2$. [4]

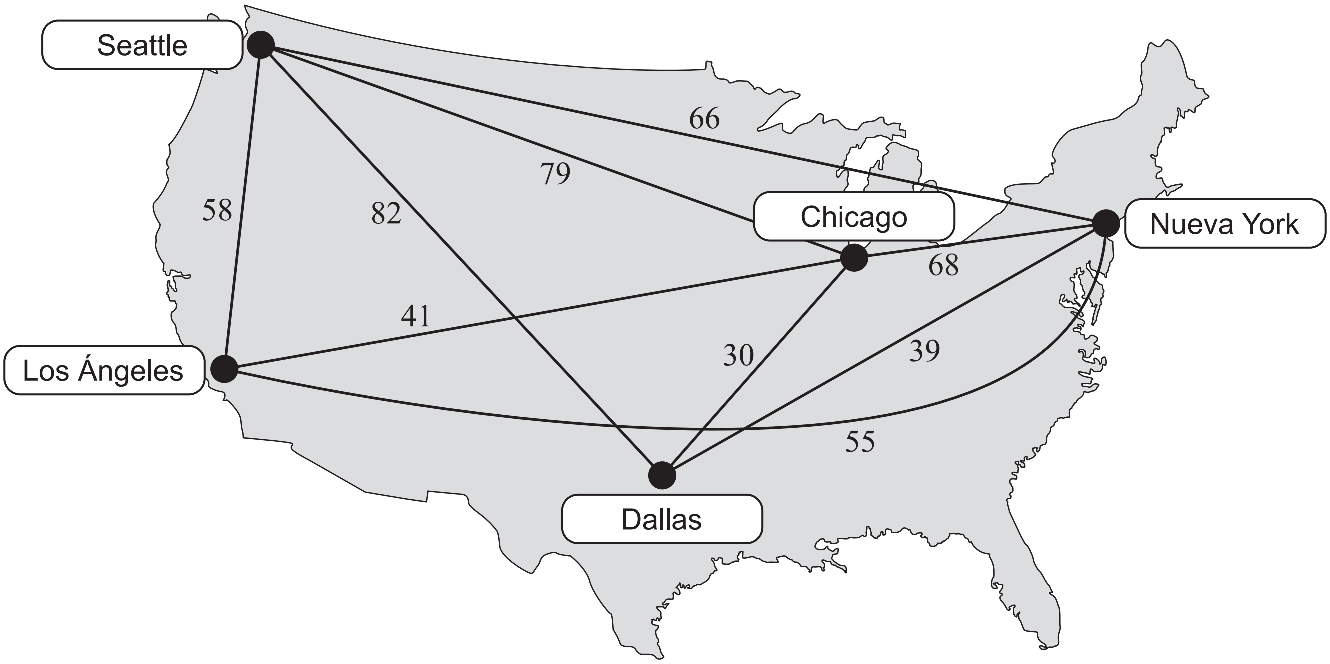
(c) Halle una expresión para $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}$. [3]

(d) Utilice la respuesta del apartado (c) para hallar el valor de x que maximiza el área del jardín. [2]

(e) Halle el área máxima posible del jardín. [2]

4. [Puntuación máxima: 19]

El siguiente grafo muestra cinco ciudades de EE. UU. que están conectadas mediante aristas ponderadas que representan el precio en dólares ($\$$) del vuelo directo más barato que hay entre esas ciudades.



(a) Explique por qué se puede decir que el grafo es “conexo”, pero no “completo”. [2]

(b) Halle un árbol generador mínimo para el grafo utilizando el algoritmo de Kruskal.

Indique claramente en qué orden se van añadiendo las aristas y dibuje el árbol que ha obtenido. [3]

(c) Utilizando únicamente las aristas obtenidas al resolver el apartado (b), halle un límite superior para el problema del “viajante”. [2]

Ronald vive en Nueva York y quiere volar al resto de ciudades antes de volver finalmente a Nueva York. Después de mucho investigar, Ronald averigua que existe un vuelo directo de Los Ángeles a Dallas que cuesta $26\,\$$, así que actualiza el grafo para mostrar este dato.

(d) Utilizando el algoritmo del vecino más próximo y empezando en Los Ángeles, determine un límite superior que sea mejor que el que halló en el apartado (c).

Indique claramente el orden en el que va añadiendo los vértices. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 4: continuación)

(e) (i) Ahora borre el vértice que representa a Chicago y utilice el algoritmo del vértice borrado para determinar un límite inferior para el problema del "viajante".

(ii) Del mismo modo, pero borrando en su lugar el vértice que representa a Seattle, determine otro límite inferior. [5]

(f) A partir de lo anterior, y utilizando las respuestas halladas previamente, escriba la mejor inecuación que describe el tour **menos** caro que podría hacer Ronald. Sea C una variable que representa el coste total del tour, en dólares ($\$$). [2]

(g) Escriba un tour cuyo coste sea estrictamente mayor que el límite inferior que ha hallado y estrictamente menor que el límite superior que ha hallado. [2]

5. [Puntuación máxima: 14]

Bélgica, Alemania y Países Bajos son tres países vecinos cuyas fronteras coinciden en un único punto llamado Vaalserberg.

Para facilitar la futura planificación del transporte, en un mapa se trazó un círculo de $10\,\text{km}$ alrededor de Vaalserberg. A continuación, se realizó un estudio durante cinco años para determinar qué porcentaje de las personas que vivían en cada uno de estos países (dentro de esa región circular de $10\,\text{km}$) se quedaron en su propio país y qué porcentaje se mudaron a otro país dentro de ese círculo.

A raíz de este estudio, se observaron los siguientes movimientos durante esos cinco años:

- Desde Bélgica, el $5\,\%$ se mudaron a Alemania y el $0{,}5\,\%$ se mudaron a Países Bajos.
- Desde Alemania, el $2\,\%$ se mudaron a Países Bajos y el $1{,}5\,\%$ se mudaron a Bélgica.
- Desde Países Bajos, el $3\,\%$ se mudaron a Alemania y el $2\,\%$ se mudaron a Bélgica.

Cualquier otro movimiento de población ocurrido dentro de la región circular se puede ignorar.

(a) Represente toda la información anterior mediante una matriz de transición $\boldsymbol{T}$. [3]

Al final del estudio, la población de la zona belga era de $26\,000$ personas, la población de la zona alemana era de $240\,000$ y la población de la zona de los Países Bajos era de $50\,000$.

(b) Utilizando $\boldsymbol{T}$, halle cuál será la población esperada de la zona alemana cercana a Vaalserberg 30 años después del final del estudio. [4]

Para la matriz $\boldsymbol{T}$ existe un vector que representa el estado estacionario

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

donde u_1, u_2 y u_3 son los porcentajes de la población total que están en la zona belga, en la zona alemana y en la zona de los Países Bajos , respectivamente.

El vector del estado estacionario $\boldsymbol{u}$ se puede hallar resolviendo un sistema de ecuaciones.

(c) (i) Determine esas ecuaciones que habría que resolver.

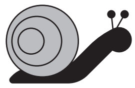
(ii) Resolviendo ese sistema de ecuaciones, halle $\boldsymbol{u}$. [3]

(d) Utilice la respuesta del apartado (c)(ii) para determinar cuál será, a largo plazo, la población esperada de la zona alemana. [2]

(e) Sugiera dos razones por las cuales la respuesta dada en el apartado (d) es poco probable que sea exacta. Puede hacer comentarios sobre el modelo y también sobre la situación en contexto. [2]

6. [Puntuación máxima: 18]

El jardinero de un parque del barrio sugiere que el número de caracoles que se encuentran en el parque se puede modelizar mediante una distribución de Poisson.



(a) Sugiera dos observaciones que el jardinero quizá haya hecho y que le hayan llevado a sugerir este modelo. [2]

Suponga ahora que el modelo es válido y que la media del número de caracoles por m^2 es igual a $0{,}2$. El jardinero inspecciona al azar una zona del parque de $12\,\mathrm{m}^2$ de superficie.

(b) Halle la probabilidad de que el jardinero encuentre exactamente cuatro caracoles. [3]

(c) Halle la probabilidad de que el jardinero encuentre menos de tres caracoles. [2]

(d) Halle la probabilidad de que, en tres inspecciones consecutivas, el jardinero encuentre en cada inspección al menos un caracol. [3]

Tras las fuertes lluvias caídas durante la noche, el jardinero quiso determinar si el número de caracoles que se encuentran en una zona aleatoria del parque de $12\,\mathrm{m}^2$ habrá aumentado o no.

(e) Indique las hipótesis de la prueba. [2]

(f) Halle la región crítica para la prueba, a un nivel de significación del $1\,\%$. [3]

(g) Sabiendo que la media del número de caracoles por m^2 en realidad ha aumentado hasta $0{,}75$, halle la probabilidad de que el jardinero cometa un error de Tipo II. [3]

7. [Puntuación máxima: 18]

Una bióloga sugiere que las razones de cambio de la población de moscas de la fruta (transcurrido un tiempo $t \geq 0$) en un ecosistema concreto vienen dadas por las siguientes ecuaciones, donde x es la población de moscas de la fruta macho y que y es la población de moscas de la fruta hembra.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -4x + 6y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 9x - y$$

(a) Halle los valores propios y los correspondientes vectores propios de la matriz $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$. [6]

(b) A partir de lo anterior, escriba la solución general del sistema; dé la respuesta de la forma $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\boldsymbol{p}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + B\boldsymbol{p}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$, donde A, B, λ_1, λ_2 $(\lambda_2 > \lambda_1)$ son constantes escalares y $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ son constantes vectoriales. [2]

Inicialmente $x = 500$ e $y = 125$.

(c) Determine el valor de A y el valor de B. [2]

(d) Indique la razón a largo plazo entre las moscas de la fruta macho y las moscas de la fruta hembra. [1]

(e) Halle el valor de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en el instante $t = 0$. [3]

(f) Dibuje aproximadamente la trayectoria —sobre el retrato de fase— correspondiente al crecimiento de la población de moscas de la fruta. [4]

Fuentes: